

УДК 517.3

Ю. Г. Смирнов, М. Ю. Медведик, Е. Е. Гришина

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ НЕОДНОРОДНОГО ОБРАЗЦА МАТЕРИАЛА

Аннотация. Рассмотрен итерационный метод определения эффективной диэлектрической проницаемости. Получены результаты, показывающие сходимость метода. Представлены графики зависимости значения диэлектрической проницаемости от числа итераций.

Ключевые слова: электромагнитная задача дифракции, эффективная диэлектрическая проницаемость, итерационный метод.

Abstract. The article considers an iteration method of effective permittivity definition. The authors present the results of the method's convergence. The article also introduces the graphs of dielectric permittivity value dependence on the number of iterations.

Key words: electromagnetic diffraction problem, effective permittivity, iteration method.

Введение

Исследуется задача определения эффективной диэлектрической проницаемости неоднородных образцов материалов произвольной геометрической формы, помещенных в прямоугольный волновод с идеально проводящими стенками. Данная задача может быть сведена к решению нелинейного объемного сингулярного интегрального уравнения. Это показано в [1]. Интегральное уравнение было изучено в [2]. При этом использовались результаты исследования соответствующей краевой задачи и теорема эквивалентности краевой задачи и интегрального уравнения. Теорема о существовании и единственности решений нелинейного объемного сингулярного интегрального уравнения и обратной краевой задачи для определения эффективной диэлектрической проницаемости наноматериалов была доказана в [3–5]. Были получены численные результаты для случая однородного тела [6]. Особенности реализации численного алгоритма представлены в [7].

Применение данной задачи находит, например, при определении диэлектрических и магнитных параметров нанокompозитных материалов и сложных наноструктур с различной геометрией. Это является актуальной проблемой нанотехнологии и наноэлектроники. При экспериментальном измерении эти параметры, как правило, труднодоступны (ввиду композитного характера материалов) [8, 9], что приводит к необходимости применять методы математического моделирования и находить решение численно с помощью компьютеров [10].

1. Постановка обратной задачи

Рассмотрим следующую задачу дифракции. Пусть в декартовой системе координат $P = \{x : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, -\infty < x_3 < \infty\}$ – волновод с идеально

проводящей поверхностью ∂P . В волноводе расположено объемное тело Q ($Q \subset P$ – область), характеризующееся постоянной магнитной проницаемостью μ_0 и положительной 3×3 -матрицей-функцией (тензором) диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}(x)$. Компоненты $\hat{\epsilon}(x)$ являются ограниченными функциями в области $\bar{Q}$, $\hat{\epsilon} \in L_\infty(Q)$, а также $\hat{\epsilon}^{-1} \in L_\infty(Q)$.

Граница ∂Q области Q кусочно-гладкая. Точнее, предположим, что для каждой точки границы $x_0 \in \partial Q$ существует окрестность Θ (в R^3) и C^2 -диффеоморфизм этой окрестности на R^3 , при котором точка x_0 переходит в точку 0 , а образом множества $\Theta \cap Q$ является множество одного из следующих типов (ниже (x_1, x_2, x_3) – декартовы; (r, θ) , $r \geq 0$, $\theta \in S^2$ – сферические координаты в R^3). Либо $x_1 > 0$ (x_0 – точка гладкости границы); либо $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ (x_0 – точка на «выходящем» ребре); либо $R^3 \setminus \{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ (x_0 – точка на «входящем» ребре); либо $r > 0$, $\theta \in Q'$, где $Q' \subset S^2$ – односвязная область с кусочно-гладкой границей $\partial Q'$ (x_0 – вершина «конуса с ребрами»). В частности, если $\partial Q'$ – гладкая, то x_0 – коническая точка; если $\partial Q'$ образована дугами больших окружностей, то x_0 – вершина многогранного угла. Пусть Q – ограниченная область и каждая точка $x \in \partial Q$ принадлежит одному из этих типов. Тогда будем говорить, что Q – область с кусочно-гладкой границей. Будем также предполагать, что тело Q не касается стенок волновода, $\partial Q \cap \partial P = \emptyset$. В $P \setminus \bar{Q}$ среда изотропна и однородна с постоянными $\epsilon_0(>0)$, $\mu_0(>0)$.

Требуется определить электромагнитное поле $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_{2,loc}(P)$, возбуждаемое в волноводе сторонним полем с временной зависимостью вида $e^{-i\omega t}$. Источник стороннего поля – электрический ток $\mathbf{j}^0 \in L_{2,loc}(P)$. В области $P \subset R^3$ стандартные дифференциальные операторы grad, div, rot понимаются в смысле обобщенных функций.

Будем искать «слабые» (обобщенные) решения системы уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= -i\omega \hat{\epsilon} \mathbf{E} + \mathbf{j}_E^0, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= i\omega \mu_0 \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (1)$$

Эти решения должны удовлетворять условиям на бесконечности [9]: поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ при $|x_3| > C$ для достаточно больших $C > 0$ имеют представление

$$\begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \sum_p R_p^{(\pm)} \exp\left(i\gamma_p^{(1)} |x_3|\right) \begin{pmatrix} \lambda_p^{(1)} \Pi_p \vec{e}_3 - i\gamma_p^{(1)} \nabla_2 \Pi_p \\ -i\omega \epsilon_0 (\nabla_2 \Pi_p) \times \vec{e}_3 \end{pmatrix} +$$

$$+\sum_p Q_p^{(\pm)} \exp\left(i\gamma_p^{(2)}|x_3|\right) \begin{pmatrix} i\omega\mu_0(\nabla_2\Psi_p)\times\vec{e}_3 \\ \lambda_p^{(2)}\Psi_p\vec{e}_3 - i\gamma_p^{(2)}\nabla_2\Psi_p \end{pmatrix} \quad (2)$$

(+ соответствует $+\infty$, – соответствует $-\infty$), где $\vec{e}_{1,2,3}$ – орты в декартовой системе координат; $\gamma_p^{(j)} = \sqrt{k_0^2 - \lambda_p^{(j)}}$, $\text{Im}\gamma_p^{(j)} > 0$ или $\text{Im}\gamma_p^{(j)} = 0$, $k\gamma_p^{(j)} \geq 0$ ($k_0^2 = \omega^2\epsilon_0\mu_0$, $\nabla_2 \equiv \vec{e}_1\partial/\partial x_1 + \vec{e}_2\partial/\partial x_2$). Здесь $\lambda_p^{(1)}$, $\Pi_p(x_1, x_2)$ и $\lambda_p^{(2)}$, $\Psi_p(x_1, x_2)$ – полные системы собственных значений и ортонормированных в $L_2(\Pi)$ собственных функций двумерного оператора Лапласа $-\Delta$ в прямоугольнике $\Pi := \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b\}$ с условиями Дирихле и Неймана соответственно, и $\nabla_2 \equiv e_1\partial/\partial x_1 + e_2\partial/\partial x_2$. Для коэффициентов разложений (2) имеют место оценки

$$R_p^{(\pm)}, Q_p^{(\pm)} = O(p^m), \quad p \rightarrow \infty, \quad (3)$$

для всех $m \in N$.

С физической точки зрения условия (2) означают, что рассеянное поле является суперпозицией нормальных волн, расходящихся от тела. Условия (3) обеспечивают экспоненциальную сходимость рядов (2), а также возможность их почленного дифференцирования по x_j любое число раз.

Для **E**, **H** должны выполняться краевые условия на стенках волновода:

$$\mathbf{E}_\tau|_{\partial P} = 0, \quad \mathbf{H}_\nu|_{\partial P} = 0. \quad (4)$$

Если выполняются уравнения Максвелла, то второе условие в (4) следует из первого, и его можно опустить. Но если рассматривать оператор Максвелла, порождаемый левой частью (1), то надо ставить оба условия.

Для $u \in H^1(P)$ существуют граничные значения из пространства $H^{1/2}(\partial P)$ в смысле теории следов. Почти везде на ∂P определен вектор нормали.

Пусть также $\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{H}^0$ – решения рассматриваемой краевой задачи в отсутствие неоднородного тела Q , $\hat{\epsilon}(x) = \epsilon_0 \hat{I}$, $x \in P$ ($\hat{I}$ – единичный тензор):

$$\text{rot } \mathbf{H}^0 = -i\omega\epsilon_0 \mathbf{E}^0 + \mathbf{j}_E^0, \quad \text{rot } \mathbf{E}^0 = i\omega\mu_0 \mathbf{H}^0 \quad (5)$$

с краевыми условиями

$$\mathbf{E}_\tau^0|_{\partial P} = 0, \quad \mathbf{H}_\nu^0|_{\partial P} = 0. \quad (6)$$

Эти решения могут быть выражены аналитически через $\mathbf{j}_E^0$ с помощью введенного ниже тензора Грина. Решения не обязаны удовлетворять условиям на бесконечности. Например, $\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{H}^0$ могут быть ТМ- или ТЕ-модой этого волновода.

Имеют место результаты о гладкости решений задач (1)–(4) и (5)–(6) при более гладких данных [1]. Сформулируем один из таких результатов.

Утверждение 1. Пусть $\mathbf{j}_E^0 \in H^1_{loc}(P)$. Тогда $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0 \in H^1_{loc}(P)$. Пусть, кроме того, $\partial Q \in C^2$, $\hat{\mathbf{e}} \in C^1(\bar{Q})$. Тогда сужения $\mathbf{E}|_Q, \mathbf{H}|_Q \in H^1(Q)$ и $\mathbf{E}|_{P \setminus Q}, \mathbf{H}|_{P \setminus Q} \in H^1_{loc}(P \setminus Q)$. Кроме того, справедливы условия сопряжения на ∂Q :

$$[\mathbf{E}_\tau]|_{\partial Q} = 0, \quad [\mathbf{H}_\tau]|_{\partial Q} = 0,$$

где $[\cdot]$ означает разность следов с разных сторон ∂Q .

В предположениях утверждения 1 краевые условия на ∂P и условия сопряжения на ∂Q понимаются в смысле равенства следов элементов из $H^{1/2}_{loc}(\partial P)$ и $H^{1/2}(\partial Q)$. Ясно, что при первоначальных общих предположениях о тензоре $\hat{\mathbf{e}}$ такие условия сопряжения не имеют смысла.

Рассмотрим диагональный тензор Грина $\hat{G}_E$, компоненты которого являются фундаментальными решениями уравнения Гельмгольца в P с коэффициентом $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$ и удовлетворяют краевым условиям первого или второго рода на ∂P , обеспечивающим обращение в нуль тангенциальных составляющих напряженности электрического поля на стенках волновода. Его компоненты имеют вид [1]

$$\begin{aligned} G_E^1 &= \frac{2}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}(1+\delta_{0n})} \cos \frac{\pi n}{a} x_1 \sin \frac{\pi m}{b} x_2 \cos \frac{\pi n}{a} y_1 \sin \frac{\pi m}{b} y_2, \\ G_E^2 &= \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}(1+\delta_{0m})} \sin \frac{\pi n}{a} x_1 \cos \frac{\pi m}{b} x_2 \sin \frac{\pi n}{a} y_1 \cos \frac{\pi m}{b} y_2, \\ G_E^3 &= \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}} \sin \frac{\pi n}{a} x_1 \sin \frac{\pi m}{b} x_2 \sin \frac{\pi n}{a} y_1 \sin \frac{\pi m}{b} y_2. \end{aligned}$$

В этих выражениях $\gamma_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 - k_0^2}$, при этом ветвь квадратного корня выбирается так, чтобы $\text{Im} \gamma_{nm} \geq 0$ и $\text{Re} \gamma_{nm} \geq 0$, если $\text{Im} \gamma_{nm} = 0$. Здесь k_0 – волновое число свободного пространства, $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$; ω – круговая частота.

Решение поставленной задачи, описанной выше, сводится к интегро-дифференциальному уравнению [1] относительно поля $\mathbf{E}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) &= \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(r) \left[\frac{\hat{\mathbf{e}}(y)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy + \\ &+ \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(r) \left[\frac{\hat{\mathbf{e}}(y)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in Q. \end{aligned} \quad (7)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) = \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(r) \left[\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy + \\ + \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(r) \left[\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in P \setminus Q. \end{aligned} \quad (8)$$

Будем рассматривать обратную краевую задачу для определения эффективной диэлектрической проницаемости образца наноматериала, расположенного в волноводе.

2. Решение обратной краевой задачи

Рассмотрим изотропный случай и будем считать, что $\hat{\varepsilon}(x) = \varepsilon$, где ε — неизвестная константа (эффективная диэлектрическая проницаемость) образца [4, 10, 11]. Предположим, что $\pi/a < k_0 < \pi/b$. В этом случае в волноводе может распространяться только одна мода, потому что $\text{Im} \gamma_1^{(2)} = 0$, $\gamma_1^{(2)} = \sqrt{k_0^2 - \pi^2/a^2} > 0$ и $\text{Im} \gamma_p^{(j)} > 0$ для всех p, j за исключением $p=1$ и $j=2$. Мы также предполагаем, что

$$\mathbf{E}^0(x) = e_2 A^{(+)} i \omega \mu_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} e^{-i \gamma_1^{(2)} x_3}.$$

Здесь $A^{(+)}$ — (известная) амплитуда распространяющейся волны, $\psi_1 = \cos \pi x_1/a$. При $|x_3| \rightarrow \infty$ получаем, что:

$$\begin{aligned} G_E^1 \rightarrow 0, \quad G_E^3 \rightarrow 0, \\ G_E^2 - \frac{1}{ab\gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i \gamma_1^{(2)} |x_3 - y_3|} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

равномерно по $y \in Q$. Затем мы имеем $\text{div} \hat{G}_E \rightarrow 0$ равномерно по $y \in Q$ при $|x_3| \rightarrow \infty$ (потому что $\frac{\partial G_E^2}{\partial x_2} \rightarrow 0$ равномерно по $y \in Q$ при $|x_3| \rightarrow \infty$). Вычислив предел при $|x_3| \rightarrow \infty$ в (2), получим уравнение

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \int_Q G_E^2(x, y) E_2(y) dy, \quad x \in Q, \quad (9)$$

и, принимая во внимание условие на бесконечности при $|x_3| \rightarrow \infty$,

$$e_2 Q_1^{(+)} e^{-i \gamma_1^{(2)} x_3} i \omega \mu_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} = e_2 A^{(+)} e^{-i \gamma_1^{(2)} x_3} i \omega \mu_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} +$$

$$+ \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \frac{k_0^2 e_2}{ab\gamma_{10}} \int_Q \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i\gamma_1^{(2)}(x_3 - y_3)} E_2(y) dy. \quad (10)$$

Из этого следует

$$Q_1^{(+)} = A^{(+)} + k_0^2 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \frac{1}{b\gamma_{10}i\pi\omega\mu_0} \int_Q \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_1^{(2)}y_3} E_2(y) dy. \quad (11)$$

Мы предполагаем, что коэффициент $Q_1^{(+)}$ известен из эксперимента.

Таким образом, мы имеем

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 = \frac{C}{(\mathbf{E}, \mathbf{f})}, \quad (12)$$

где

$$C = \frac{i\pi\omega\mu_0 b\gamma_{10} (Q_1^{(+)} - A^{(+)})}{k_0^2}; \quad (13)$$

$$\mathbf{f} = e_2 \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i\gamma_1^{(2)}y_3}, \quad (14)$$

а скобки обозначают скалярное произведение в пространстве $L_2(Q)$:

$$(\mathbf{E}, \mathbf{f}) = \int_Q \mathbf{E}(y) \overline{\mathbf{f}(y)} dy. \quad (15)$$

Подставляя (10) и (12) в формулу (9), мы получаем нелинейное объемное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{E}, \mathbf{f})}{C} (\mathbf{E}(x) - \mathbf{E}^0(x)) &= k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{E}(y) dy + \\ &+ \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in Q. \end{aligned} \quad (16)$$

Введем линейный интегральный оператор

$$A_0 \mathbf{E} := k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{E}(y) dy + \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{E}(y) dy. \quad (17)$$

Перепишем уравнение (17) в операторной форме:

$$\frac{(\mathbf{E}, \mathbf{f})}{C} (\mathbf{E} - \mathbf{E}^0) = A_0 \mathbf{E}. \quad (18)$$

Пусть $\tilde{A}^{(+)} = A^{(+)} i\omega\mu_0 \frac{\pi}{a}$, $\tilde{C} = \frac{C}{\tilde{A}^{(+)}}$ и

$$r_* = \left(\frac{\|A_0 \mathbf{f}\|^2}{\|A_0\|^2} + \frac{\|A_0 \mathbf{f}\| \|\mathbf{f}\|}{\|A_0\|} \right)^{1/2} - \frac{\|A_0 \mathbf{f}\|}{\|A_0\|}. \quad (19)$$

Теорема. Пусть выполнено условие

$$|\tilde{C}| < F \equiv \|\mathbf{f}\|^2 \frac{1 - \frac{2r_*}{\|\mathbf{f}\|}}{\|A_0\|}. \quad (20)$$

Тогда существует и единственно решение нелинейного объемного интегрального уравнения (16). Также существует и единственно решение обратной краевой задачи, полученное по формуле (12). Кроме того, приближенное решение уравнения (16) может быть найдено посредством итерационного процесса

$$\mathbf{E}_{n+1} = \mathbf{E}_n - \frac{1}{\tilde{A}^{(+)} \|\mathbf{f}\|^2} \left\{ (\mathbf{E}_n, \mathbf{f}) (\mathbf{E}_n - \mathbf{E}^0) - C(A_0 \mathbf{E}_n) \right\}, \quad (21)$$

который сходится для любого начального приближения $\mathbf{E}_0 \in \overline{S_{r_*}(\mathbf{E}^0)}$ со скоростью геометрической прогрессии, где r_* определяется формулой (19).

Условие (14) имеет место, если величина $|Q_1^{(+)} - A^{(+)}|$ достаточно мала. С физической точки зрения это означает, что амплитуда прошедшей волны не сильно отличается от амплитуды падающей волны.

Рассмотрим схему итерационного процесса (21) для решения нелинейного интегрального уравнения (16). При $n = 0, 1, \dots$ на каждом шаге необходимо (численно) вычислять действие линейного объемного сингулярного интегрального оператора A_0 . Алгоритм вычислений описан в [12]; алгоритм суммирования рядов представлен в [1]. В качестве начального приближения естественно взять $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}^0$. После решения уравнения (16) с заданной точностью с помощью итерационной процедуры (21) по формулам (10)–(12) находим неизвестную эффективную диэлектрическую проницаемость ε .

3. Численные результаты

Аналитическое решение задачи дифракции на секции в волноводе было получено в [13]. Выберем $\varepsilon = \varepsilon_1$ и найдем коэффициент F по формуле

$$F = - \frac{2A\gamma_1 e^{i\gamma_1 c}}{\gamma \left(\left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma} \right)^2 e^{-i\gamma c} - \left(1 + \frac{\gamma_1}{\gamma} \right)^2 e^{i\gamma c} \right)},$$

$$\text{где } \gamma_1 = \sqrt{k_0^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}, \quad \gamma = \sqrt{k^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}.$$

Возьмем в качестве коэффициента $Q_1^{(+)}$ при решении обратной краевой задачи итерационным методом коэффициент F и будем вычислять ε . Решение обратной задачи было запрограммировано, и были получены следующие результаты.

В табл. 1–4 приведены значения ε в зависимости от размера сетки m , а также число итераций, за которое процесс сходил к данному значению.

Таблица 1

$$\varepsilon_1 = 0,9$$

m	Результат	Количество итераций
4×4×4	0,900153 – $i0,000931323$	8
6×6×6	0,900218 – $i0,000422493$	8
8×8×8	0,900228 – $i0,000239316$	9
10×10×10	0,90023 – $i0,000153641$	8
12×12×12	0,900231 – $i0,000106866$	8

Таблица 2

$$\varepsilon_1 = 1,1$$

m	Результат	Количество итераций
4×4×4	1,10008 – $i0,000789712$	8
6×6×6	1,09994 – $i0,000365684$	9
8×8×8	1,09987 – $i0,000208479$	8
10×10×10	1,09983 – $i0,000134366$	10
12×12×12	1,09981 – $i9,37681e-005$	9

Таблица 3

$$\varepsilon_1 = 1,3$$

m	Результат	Количество итераций
4×4×4	1,30053 – $i0,00563096$	21
6×6×6	1,29705 – $i0,00264162$	16
8×8×8	1,29547 – $i0,00152342$	16
10×10×10	1,29468 – $i0,000998563$	22
12×12×12	1,29422 – $i0,000712126$	21

Таблица 4

$$\varepsilon_1 = 1,5$$

m	Результат	Количество итераций
4×4×4	1,50133 – $i0,013398$	32
6×6×6	1,48543 – $i0,00608997$	44
8×8×8	1,47892 – $i0,00346329$	47
10×10×10	1,47572 – $i0,00225939$	48
12×12×12	1,47393 – $i0,0016113$	48

Далее на рис. 1, 2 изображены зависимости значений диэлектрической проницаемости от числа итераций для $m = 4 \times 4 \times 4$ и $m = 10 \times 10 \times 10$.

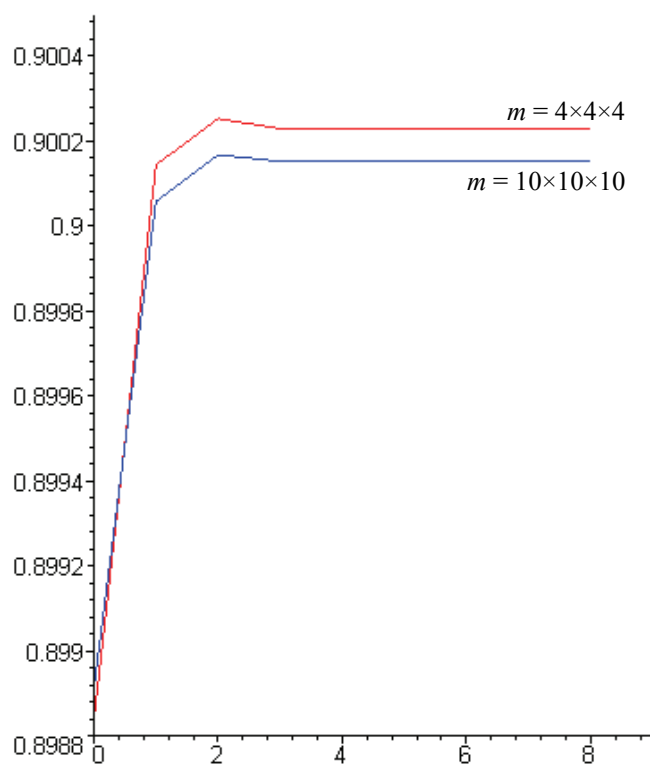


Рис. 1. График зависимости значения диэлектрической проницаемости от числа итераций. $\epsilon_1 = 0,9$ (размер сетки $m = 4 \times 4 \times 4$, $m = 10 \times 10 \times 10$)

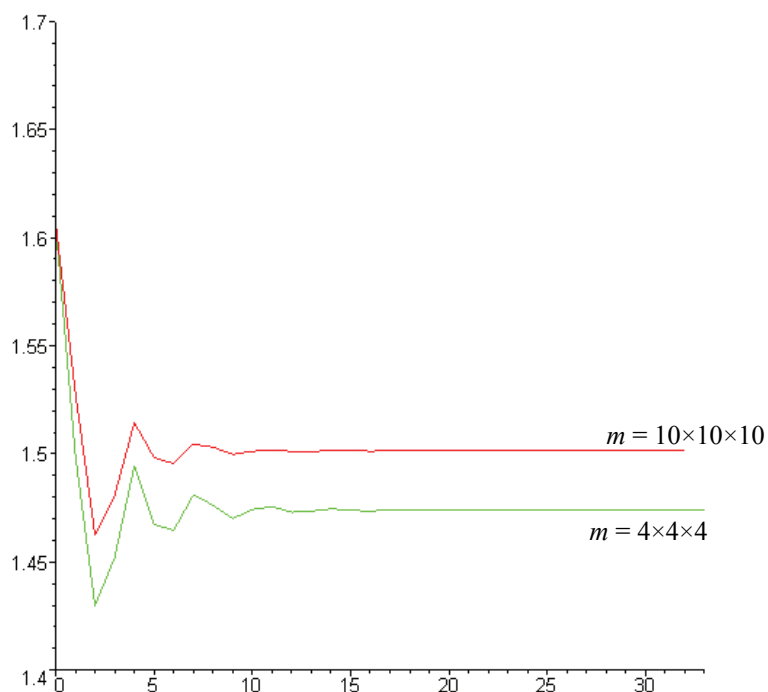


Рис. 2. График зависимости значения диэлектрической проницаемости от числа итераций. $\epsilon_1 = 1,5$ (размер сетки $m = 4 \times 4 \times 4$, $m = 10 \times 10 \times 10$)

Представленные выше результаты демонстрируют сходимость разработанного численного метода к точному значению с точностью порядка от 10^{-2} до 10^{-4} для различных сеток. Графики подтверждают сходимость метода с указанной точностью.

Список литературы

1. **Смирнов, Ю. Г.** Применение ГРИД-технологий для решения нелинейного объемного сингулярного интегрального уравнения для определения эффективной диэлектрической проницаемости наноматериалов / Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – № 3. – С. 39–54.
2. **Kobayashi, K.** Investigation of Electromagnetic Diffraction by a Dielectric Body in a Waveguide Using the Method of Volume Singular Integral Equation / K. Kobayashi, Yu. V. Shestopalov, Yu. G. Smirnov // SIAM Journal of Applied Mathematics. – 2009. – V. 70, № 3. – P. 969–983.
3. **Смирнов, Ю. Г.** О существовании и единственности решений обратной краевой задачи для определения эффективной диэлектрической проницаемости наноматериалов / Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 1. – С. 11–24.
4. **Смирнов, Ю. Г.** О существовании и единственности решений обратной краевой задачи определения диэлектрической проницаемости материалов / Ю. Г. Смирнов, Д. А. Миронов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2010. – Т. 50, № 9. – С. 1587–1597.
5. **Smirnov, Yu. G.** Existence and uniqueness of a solution to the inverse problem of the complex permittivity reconstruction of a dielectric body in a waveguide / Yu. G. Smirnov, Yu. V. Shestopalov // Inverse Problems. – 2010. – V. 26. – P. 1–14.
6. **Smirnov, Y.** Analysis of Inverse Scattering in a Waveguide using the Method of Volume Singular Integral Equation / Y. Smirnov, Y. Shestopalov, D. Mironov // URSI International Symposium on Electromagnetic Theory (EMTS 2010) (August 16–19, 2010). – Berlin, Germany, 2010. – P. 532–534.
7. **Смирнов, Ю. Г.** Метод коллокации решения объемного сингулярного интегрального уравнения в задаче определения диэлектрической проницаемости материала / Ю. Г. Смирнов, М. Ю. Медведик, Д. И. Васюнин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 3. – С. 71–87.
8. **Solymar, L.** Waves in Metamaterial / L. Solymar, E. Shamonina. – New York : Oxford University Press, 2009.
9. **Zharova, N. A.** Nonlinear Transmission and Spatiotemporal Solutions in Metamaterials with Negative Refraction / N. A. Zharova, I. V. Shadrivov, A. A. Zharov, Yu. S. Kivshar // Optics Express. – 2005. – V. 13, № 4. – P. 1291–1298.
10. **Shestopalov, Yu. V.** Development of Mathematical Methods for Reconstructing Complex Permittivity of a Scatterer in a Waveguide / Yu. V. Shestopalov, Yu. G. Smirnov, V. V. Yakovlev // Proceedings of 5th International Workshop on Electromagnetic Wave Scattering, October 22–25. – Antalya, Turkey, 2008.
11. **Shestopalov, Yu. V.** Volume Singular Integral Equations Method for Determination of Effective Permittivity of Meta- and Nanomaterials / Yu. V. Shestopalov, Yu. G. Smirnov, V. V. Yakovlev // Proceedings of Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS 2008), July 2–6, 2008. – Cambridge, USA, 2008. – P. 291–292.
12. **Самохин, А. Б.** Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии / А. Б. Самохин. – М. : Радио и Связь, 1998.
13. **Гурина, Е. Е.** Численное и аналитическое решение задачи дифракции электромагнитного поля на диэлектрическом параллелепипеде, расположенном

в прямоугольном волноводе / Е. Е. Гурина, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 2. – С. 32–43.

Смирнов Юрий Геннадьевич

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
математики и суперкомпьютерного
моделирования, Пензенский
государственный университет

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Smirnov Yuri Gennadyevich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of sub-department
of mathematics and supercomputer
modeling, Penza State University

Медведик Михаил Юрьевич

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет

E-mail: _medv@mail.ru

Medvedik Mikhail Yuryevich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University

Гришина Елена Евгеньевна

аспирант, Пензенский
государственный университет

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Grishina Elena Evgenyevna

Postgraduate student,
Penza State University

УДК 517.3

Смирнов, Ю. Г.

Итерационный метод определения эффективной диэлектрической проницаемости неоднородного образца материала / Ю. Г. Смирнов, М. Ю. Медведик, Е. Е. Гришина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2011. – № 3 (19). – С. 3–13.